Seminar
Summen von Quadraten und K-Theorie

In diesem Seminar beschäftigen wir uns mit der Existenz von bestimmten Quadratsummengleichungen (unten Genaueres) mit Koeffizienten in einem Körper.

Ein Resultat aus dem Jahr 1898 in dieser Richung ist der berühmte 1-2-4-8-Satz von Hurwitz, der besagt, dass es keine endlich dimensionalen reellen Vektorräume mit vernünftiger Multiplikation und multiplikativer Norm, außer den bekannten reellen Zahlen, komplexen Zahlen, Quaternionen und Oktaven gibt - es lohnt sich also nicht, weitere zu suchen. Die Untersuchung der Existenz von Quadratsummengleichungen hat eine interessante Geschichte, die Verbindungen zwischen vielen Bereichen der Mathematik, wie zum Beispiel der Algebra, Topologie, Geometrie und Kombinatorik aufzeigt. Allerdings ist dies keineswegs ein nicht aktuelles Problem: Beispielsweise haben Dugger und Isaksen im Jahr 2005 die sogenannte algebraische K-Theorie benutzt, um die Existenz gewisser Quadratsummengleichungen für Koeffizienten aus einem beliebigen Körper auszuschließen.

Die Quadratsummengleichungen (QSG vom Typ (r, s, n)), die wir untersuchen werden, sind von der Form

$$\left(x_1^2 + \ldots + x_r^2\right) \left(y_1^2 + \ldots + y_s^2\right) = z_1^2 + \ldots + z_n^2$$

wobei die z_i bilineare Ausdrücke in den x_p und y_q sind. Multipliziert man den Ausdruck auf der linken Seite aus, so erhält man eine QSG vom Typ (r, s, rs). Allerdings liefert die Multiplikativität der Norm für komplexe Zahlen eine QSG von Typ $(2, 2, 2)$. Es drängt sich also die Frage auf, für welche Tripel (r, s, n) von natürlichen Zahlen eine zugehörige QSG existiert.

In den ersten Sitzungen des Seminars soll die Geschichte des beschriebenen Problems besprochen und Verbindungen zu anderen Problemen in der Mathematik aufgezeigt werden. Anschließend soll die Konstruktion der sogenannten topologischen K-Theorie besprochen und einige Aussagen dazu erarbeitet werden. Diese Techniken sollen benutzt werden, um eine Existenzaussage für eine Quadratsummengleichung mit reellen Koeffizienten zu machen. Je nach Interessen der TeilnehmerInnen, kann ein Ausblick auf das Argument von Dugger und Isaksen geben werden.

$\boxed{\text{Vorbesprechung Mittwoch, den 17. Juli 2013, 11:00 Uhr im Raum M 006}}$

Bei Fragen: `florian.strunk@mathematik.uni-regensburg.de`
LP: 6, *Module:* `BV, BSem, MSem`