K_0 und G_0 eines Ringes

Im Folgenden sei R ein assoziativer Ring mit Eins, nicht notwendigerweise kommutativ. Ein R-Modul ist im Folgenden stets ein Rechts-R-Modul, schreibe $\mathbf{Mod}_R$ für die Kategorie der Rechts-R-Moduln.

1 K_0 eines Ringes

Sei $\mathbf{P}(R)$ die *Menge* der Isomorphieklassen endlich erzeugter projektiver Moduln. Mit der direkten Summe $\oplus$ und Identität 0 bildet diese Menge ein abelsches Monoid.

Definition ($K_0(R)$ für eine Ring R.)**.** Die *Grothendieck-Gruppe von* R, $K_0(R)$, ist die Gruppenvervollständigung $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}$ von $\mathbf{P}(R)$.

Erinnerung. Die Gruppenvervollständigung eines abelschen Monoids $M = (M, +, e)$ ist eine abelsche Gruppe $M^{-1}M$ zusammen mit einem universellen Morphismus von Monoiden $[]\colon M \to M^{-1}M$ in folgendem Sinne:

> Für jede abelsche Gruppe A und jeden Morphismus $\alpha\colon M \to A$ von Monoiden existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\tilde{\alpha}\colon M^{-1}M \to A$ mit $\tilde{\alpha}\big([m]\big) = \alpha(m)$ für alle $m \in M$, d.h. es kommutiert
>
> $$\begin{tikzcd} M^{-1}M \arrow[rr, dashed, "\tilde{\alpha}"] & & A \\ & M \arrow[ul, "{[]}"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$
>
> Mit anderen Worten: $[]$ ist linksadjungiert zum Vergissfunktor von abelschen Monoiden nach abelschen Gruppen
>
> $$[]\colon \mathbf{AbMon} \rightleftarrows \mathbf{AbGrp} : U\,.$$

Es ist $M^{-1}M$ gegeben durch $M \times M/_{\sim}$, wobei die Äquivalenzrelation erzeugt wird von

$$(m, n) \simeq (m + p, n + p)\,.$$

Ein *Semiring* ist ein abelsches Monoid $(M, +)$ zusammen mit einem assoziativen Produkt $\cdot$, distributiv über $+$ und einem zweiseitigen Neutralen bzgl. $\cdot$ (Beispiel: $\mathbb{N}$).

Die Gruppenvervollständigung $M^{-1}M$ (bzgl. $+$) eines Semirings M ist ein Ring. Ist $M \to N$ ein Morphismus von Semiringen, so ist $M^{-1}M \to N^{-1}N$ ein Morphismus von Ringen. Wir können $[]$ daher als Funktor

$$[]\colon \mathbf{SemRng} \to \mathbf{Rng} \qquad \text{bzw.} \qquad []\colon \mathbf{CSemRing} \to \mathbf{CRng}$$

auffassen.

Lemma 1.1. *Ist R kommutativ, so ist $K_0(R)$ ein kommutativer Ring.*

Beweis. Das Monoid $\mathbf{P}(R)$ ist ein kommutativer Semiring mit Produkt $\otimes_R$, denn $\otimes_R$ vertauscht mit $\oplus$, es ist $P \otimes_R Q \cong Q \otimes_R P$, $P \otimes_R R \cong P$ und sind $P, Q \in \mathbf{P}(R)$, so auch $P \otimes_R Q$. $\square$

Beispiel. (i) Ist k ein Körper oder eine Divisionsalgebra, so ist $\mathbf{P}(k)$ isomorph zu $\mathbb{N}$ und daher $K_0(k) = \mathbb{Z}$.

(ii) Ist $R = (R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, so ist $K_0(k) = \mathbb{Z}$ (vgl. [Weibel, Lemma 2.2]: Über einem lokalen Ring ist jeder endlich erzeugte projektive Modul frei).
(iii) Ist R ein Hauptidealring, so gilt $K_0(R) = \mathbb{Z}$.

Bemerkung (Funktorialität)**.** Wir können K_0 als Funktor

$$K_0\colon \mathbf{Rng} \to \mathbf{AbGrp} \qquad \text{bzw.} \qquad K_0\colon \mathbf{CRng} \to \mathbf{CRng}$$

auffassen: Ist $R \to S$ ein flacher Ringmorphismus, so liefert $- \otimes_R S\colon \mathbf{P}(R) \to \mathbf{P}(S)$ einen Morphismus von Monoiden $\mathbf{P}(R) \to \mathbf{P}(S)$ und somit einen Gruppenmorphismus $- \otimes_R S\colon K_0(R) \to K_0(S)$. Sind R, S kommutativ, so ist $- \otimes_R S\colon \mathbf{P}(R) \to \mathbf{P}(S)$ ein Morphismus von Semiringen und somit $- \otimes_R S\colon K_0(R) \to K_0(S)$ ein Morphismus von kommutativen Ringen.

Erinnerung. Wir können jedes Element in $K_0(R)$ schreiben als $[P] - [R^n]$ für ein $P \in \mathbf{P}(R)$ und ein $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt $[P] = [Q]$ in $K_0(R)$ genau dann, wenn R und Q stabil isomorph sind, d.h. $P \oplus R^m \cong Q \oplus R^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere gilt $[P] = [R^n]$ genau dann, wenn P stabil frei ist.

Der Monoid L aller Isomorphieklassen freier R-Moduln ist genau dann isomorph zu $\mathbb{N}$, wenn R die *IBP* (invariant basis property) erfüllt; etwa, wenn R kommutativ ist.

Lemma 1.2 ([Weibel, Lemma II.2.1])**.** *Der Morphismus von Monoiden*

$$\mathbb{N} \to \mathbf{P}(R)\,, \qquad n \mapsto R^n$$

induziert einen Gruppenmorphismus $\mathbb{Z} \to K_0(R)$.

(i) $\mathbb{Z} \to K_0(R)$ ist genau dann injektiv, wenn R die IBP erfüllt.
(ii) Angenommen, R erfüllt die IBP. Dann gilt $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$ genau dann, wenn jeder endlich erzeugte projektive R-Modul stabil frei ist.

Lemma ([Weibel, 2.1.6])**.** *Ist $R \cong \operatorname{colim}_i R_i$ Kolimes über ein filtriertes System $\{R_i\}$ von Ringen, so gilt*

$$K_0(R) \cong \operatorname{colim} K_0(R_i)\,.$$

Jeder Ring ist der direkte Limes über seine endlich erzeugten Unterringe.

Lemma 1.3 (Weibel, Lemma II.2.2)**.** *Ist $I \subset R$ ein nilpotentes Ideal (d.h. $I^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt*

$$K_0(R) \cong K_0(R/I)\,.$$

Beweis. Nach Übungsaufgabe I.2.2 (*idempotent lifting*) ist $\mathbf{P}(R) \cong \mathbf{P}(R/I)$. □

Insbesondere gilt für kommutative Ringe R, dass $K_0(R) \cong K_0(R_{\mathrm{red}})$.

Definition (Morita-Äquivalenz)**.** Zwei Ringe R, S heißen *Morita-äquivalent*, wenn $\mathbf{Mod}_R$ und $\mathbf{Mod}_S$ äquivalent als abelsche Kategorien sind, d.h., wenn es additive Funktoren T, U

$$T\colon \mathbf{Mod}_R \rightleftarrows \mathbf{Mod}_S : U$$

gibt mit $UT \cong \mathrm{id}_R$ und $TU \cong \mathrm{id}_S$.

Beispiel. Für jeden Ring R ist $S = M_n(R)$ Morita-äquivalent zu R.

Lemma 1.4. *[Weibel, Corollary II.2.7.1] Sind R und S Morita-äquivalent, so gilt*

$$K_0(R) \cong K_0(S)\,.$$

2 K_0 einer abelschen Kategorie

Definition. $K_0(\mathcal{C})$ für eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$] Sei $\mathcal{A}$ eine *kleine* abelsche Kategorie. Die *Grothendieck-Gruppe* $K_0(\mathcal{A})$ ist die abelsche Gruppe auf den Erzeugern $[A]$, $A \in \mathcal{A}$, mit Relation $[A] = [A'] + [A'']$ für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

in $\mathcal{A}$.

3 K_0 einer exakten Kategorie

Folgendes Konzept verallgemeinter K_0 einer abelschen Kategorie.

Definition ($K_0(\mathcal{C})$ für eine exakte Kategorie $\mathcal{C}$)**.** Sei $\mathcal{C}$ eine *kleine* exakte Kategorie. Definiere $K_0(\mathcal{C})$ als die abelsche Gruppe auf den Erzeugern $[C]$, $C \in \mathcal{C}$, mit Relation $[C] = [C'] + [C'']$ für jede exakte Sequenz $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ in $\mathcal{C}$.

Beispiel. Die Kategorie $\mathbf{P}(R)$ der endlich-erzeugten projektiven R-Moduln ist exakt. Da jede kurze exakte Sequenz projektiver Moduln spaltet, gilt $K_0\big(\mathbf{P}(R)\big) = K_0(R)$.

Bemerkung. Ist $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Morphismus exakter Kategorien, so erhalten wir einen Funktor $K_0(\mathcal{C}) \to K_0(\mathcal{D})$.

4 G_0 eines Ringes

Wir möchten uns auf endlich erzeugte R-Moduln beschränken. Ist R nicht noethersch, so hat $K_0(\mathbf{Mod}_R^{\mathrm{fg}})$ jedoch keine schönen Eigenschaften. So gilt etwa $K_0(\mathbf{Mod}_R^{\mathrm{fg}}) \neq K_0(\mathbf{Mod}_{R/I}^{\mathrm{fg}})$ für $I \subset R$ nilpotent.

Definition (SGA$_6$)**.** Ein R-Modul M heißt *pseudo-kohärent*, wenn er eine (möglicherweise unendliche) Auflösung

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

mit $P_i \in \mathbf{P}(R)$ besitzt. Bezeichne mit $\mathbf{M}(R)$ die Kategorie der Isomorphieklassen pseudo-kohärenten R-Moduln.

Die Kategorie $\mathbf{M}(R)$ ist abgeschlossen unter Erweiterungen in $\mathbf{Mod}_R$ (Hufeisenlemma) und somit eine exakte Kategorie.

Definition. Definiere $G_0(R) := K_0\big(\mathbf{M}(R)\big)$.

Bemerkung. Ist R (rechts-)noethersch, so ist $\mathbf{M}(R)$ eine abelsche Kategorie und besteht aus den endlich erzeugten R-Moduln. Seien im folgenden alle Ringe noethersch.

Bemerkung (Funktorialität)**.** Sei $f\colon R \to S$ ein Ringmorphismus. Ist S endlich erzeugt als R-Modul (etwa $S = R/I$ für ein Ideal $I \subset R$), so haben wir einen sog. *Transfer-Homomorphismus* $f_*\colon G_0(S) \to G_0(R)$, induziert vom Vergissfunktor $\mathbf{M}(S) \to \mathbf{M}(R)$.

Ist S flach über R, so haben wir einen *Basiswechselhomomorphismus* $f^*\colon G_0(R) \to G_0(S)$. Dann ist nämlich der Basiswechsel $f^*\colon \mathbf{M}(R) \to \mathbf{M}(S)$, $M \mapsto M \otimes_R S$ exakt.

Beispiel. (i) Für einen Körper k ist $G_0(k) \cong K_0(k) \cong \mathbb{Z}$, da jede exakte Folge in $\mathbf{M}(k)$ spaltet.

(ii) Ist R integer mit Quotientenkörper k, so haben wir einen natürlichen Morphismus $G_0(R) \to G_0(k) = \mathbb{Z}$, gegeben durch $[M] \mapsto \dim_k(M \otimes_R k)$.

(iii) Es ist $G_0(\mathbb{Z}) \cong K_0(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

liefert $[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] = [\mathbb{Z}] - [\mathbb{Z}] = 0$ in $G_0(\mathbb{Z})$ für jedes n. Mit dem Fundamentalsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen sieht man, dass $G_0(\mathbb{Z})$ von $[\mathbb{Z}]$ erzeugt wird. Da $\mathbb{Q}$ der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$ ist, haben wir wie oben $G_0(\mathbb{Z}) \to G_0(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}$, dies ist ein Homomorphismus. Wegen $r(\mathbb{Z}) = 1$ ist dieser ein Isomorphismus.

(iv) Für jeden Hauptidealring R ist $G_0(R) \cong K_0(R) \cong \mathbb{Z}$.

Lemma 4.1 ([Weibel, Corollary 6.3.1]). *Sei I ein nilpotentes Ideal eines noetherschen Ringes R. Die Inklusion $\mathbf{Mod}_{R/I} \subset \mathbf{Mod}_R$ induziert einen Isomorphismus*

$$G_0(R/I) \cong G_0(R)\,.$$

Beweis. Devissage ([Weibel, Theorem II.6.3]): Für einen endlich erzeugten R-Modul M ist die Filtrierung

$$M \supset MI \supset MI^2 \supset \cdots \supset MI^n = 0$$

endlich und alle Quotienten MI^n/MI^{n+1} sind endlich erzeugte R/I-Moduln. □

Theorem 4.2 (Fundamental theorem for G_0-theory, [Weibel, Theorem 6.5]). *Für einen noetherschen Ring R induzieren die Inklusionen $R \hookrightarrow R[t] \hookrightarrow R[t, t^{-1}]$ Isomorphismen*

$$G_0(R) \cong G_0\big(R[t]\big) \cong G_0\big(R[t, t^{-1}]\big)\,.$$

5 Vergleich von $K_0(R)$ und $G_0(R)$

Wir haben einen natürlichen Morphismus

$$K_0(R) \to G_0(R)\,, \qquad [P] \mapsto [P]\,,$$

den sogenannten *Cartan-Homomorphismus.*

Definition (regulärer lokaler Ring). Ein kommutativer noetherscher lokaler Ring $(R, \mathfrak{m})$ ist ein *regulärer lokaler Ring*, wenn die minimale Anzahl n der Erzeuger des Maximalideals $\mathfrak{m}$ gleich seiner Krulldimension ist.

Nach dem Krull'schen Hauptidealsatz gilt stets $n \geq \dim R$ und R ist regulär, falls $n = \dim R$.

Bemerkung. R ist genau dann ein regulärer lokaler Ring, wenn

$$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim R$$

für den Restklassenkörper $k := R/\mathfrak{m}$.

Beispiel. (i) Jeder Körper ist ein regulärer lokaler Ring der Dimension 0.

(ii) Jeder diskrete Bewertungsring ist ein regulärer lokaler Ring der Dimension 1. Etwa: $\mathbb{Z}_p$.

(iii) Ist R ein lokaler Ring, so ist $R[\![t]\!]$ ein regulärer lokaler Ring.

Definition (regulärer Ring). Ein *regulärer Ring* ist ein kommutativer noetherscher Ring so, dass jede Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ an einem Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ ein regulärer lokaler Ring ist.

Beispiel. (i) Körper sind regulär.

(ii) Dedekindringe sind regulär.
(iii) Ist R regulär, so auch $R[t]$.

Theorem 5.1 (Serre?)**.** *Ein kommutativer noetherscher Ring R ist genau dann dann regulär, wenn er von endlicher globaler homologischer Dimension ist. Dann ist die globale homologische Dimension gleich seiner Krulldimension.*

Erinnerung. Die globale homologische Dimension ist gleich dem Supremum über der Menge aller projektiven Dimensionen von R-Moduln, d.h. der minimalen Längen aller endlichen projektiven Auflösungen eines R-Moduls. Letzteres wird auch die projektive Dimension eines R-Moduls genannt.

Theorem 5.2 (Fundamental theorem for K_0 of regular rings, [Weibel, Theorem 7.8])**.** *Ist R ein regulärer Ring, so gilt*

$$K_0(R) \cong G_0(R)\,.$$

Insbesondere gilt

$$K_0(R) \cong K_0\big(R[t]\big) \cong K_0\big(R[t,t^{-1}]\big)\,.$$

Beweisidee. Definiere $\mathbf{H}(R)$ als die Kategorie aller R-Moduln M, die eine endliche Auflösung durch endlich erzeugte projektive Moduln besitzen. Die Kategorie $\mathbf{H}(R)$ ist eine exakte Kategorie. Dann ist (siehe [Weibel, Corollary 7.7.2])

$$K_0(R) \cong K_0\big(\mathbf{H}(R)\big)$$

mit [Weibel, Resolution theorem 7.6]. Ist R regulär, so gilt $\mathbf{H}(R) = \mathbf{M}(R)$. □