Projektive Moduln

Im Folgenden sei R ein assoziativer Ring mit Eins, nicht notwendigerweise kommutativ. Ein R-Modul ist im Folgenden stets ein Rechts-R-Modul.

1 Definition und erste Eigenschaften

Lemma/Definition 1.1. *Folgende Aussagen für einen R-Modul P sind äquivalent:*

(i) P erfüllt folgende Liftungseigenschaft:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(ii) Es existiert ein Modul Q so, dass $P \oplus Q$ frei ist.

(iii) $\mathrm{Hom}_R(P, -) \colon (R\text{−Mod}) \to (R\text{−Mod})$ *ist exakt.*

Wir nennen dann P projektiv.

Notation. Sei $\mathbf{P}(R)$ die Kategorie der endlich erzeugten projektiven R-Moduln mit R-Modulmorphismen. $\mathbf{P}(R)$ ist eine additive Kategorie (direkte Summe von projektiven Moduln ist wieder projektiv; Kokern ist i.A. nicht projektiv, siehe $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$).

Bemerkung. Wir können $\mathbf{P}$ als (Pseudo-)Funktor $\mathbf{P} \colon (\mathrm{Rng}) \to (\mathrm{Cat})$ auffassen, indem wir R die Kategorie der endlich erzeugten projektiven R-Moduln zuordnen; ein Ringmorphismus $R \to S$ liefert einen additiven Funktor $\mathbf{P}(R) \to \mathbf{P}(S)$ vermöge $P \mapsto P \otimes_R S$.

Beispiel. (i) Freie Moduln sind projektiv. Insbesondere ist jeder k-Vektorraum projektiv.

(ii) Wir haben folgende Beziehungen (evtl. kommutativ fordern)

$$\begin{tikzcd} \text{frei} \arrow[r, Rightarrow] & \text{projektiv} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[l, bend left, dotted, "\text{lokaler Ring, HIR}"] & \text{flach} \arrow[l, bend left, dotted, "\text{perfekt}"] \end{tikzcd}$$

Beispiele für perfekte Ring sind artinsche Ringe.

(iii) (Idempotente und projektive Moduln) Ein Element $e \in R$ in einem Ring R heißt idempotent, falls $e^2 = e$. Dann ist $P := eR$ projektiv, denn $R = eR \oplus (1 - e)R$.
Haben wir andererseits eine Zerlegung $R = P \oplus Q$, so gibt es (eindeutige) Element $e \in P$ und $f \in Q$ mit $e + f = 1$ in R. Es sind $e, f = 1 - e$ idempotent und $ef = fe = 0$.
$\Rightarrow \{\text{idempotente Elemente in } R\} \xleftrightarrow{1:1} \text{Zerlegungen } R \cong P \oplus Q$.

Definition. Ein Ring R heißt *lokal*, wenn er genau ein maximales (Rechts-)Ideal $\mathfrak{m}$ besitzt.

Lemma 1.2. *Für einen Ring $R \neq 0$ sind äquivalent:*

(i) R ist lokal, d.h. besitzt genau ein maximales Rechtsideal.

(ii) R besitzt genau ein maximales Linksideal.

(iii) R besitzt genau ein maximales zweiseitiges Ideal $\mathfrak{m}$ und $R \setminus \mathfrak{m} \subset R^\times$.

(iv) $R \setminus R^\times$ ist ein Ideal von R.

(v) $a + b \in \mathbb{R}^\times \Rightarrow a \in R^\times$ oder $b \in R^\times$.

Beweis. siehe. [Lam, A First Course In Noncommutative Rings, Theorem 19.1] □

Bemerkung. Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, so ist $R/\mathfrak{m}$ ein Körper oder eine Divisionsalgebra.

Lemma 1.3. *Sei R ein lokaler Ring. Ist $P \in \mathbf{P}(R)$, so ist P frei. Genauer gilt*

$$P \cong R^p \qquad p = \dim_{R/\mathfrak{m}}(P/\mathfrak{m}P).$$

Beweis. Ist $u \in R$ mit $\overline{u} \in (R/\mathfrak{m})^\times$, so ist $u \in R^\times$ (nach Wahl eines Urbildes können wir $u \in 1+\mathfrak{m} \subset R^\times$ annehmen).

Sei $P \oplus Q \cong R^n$. Als Vektorräume über $k = R/\mathfrak{m}$ haben wir $P/\mathfrak{m}P \cong k^p$ und $Q/\mathfrak{m}Q \cong k^q$ für $p, q \in \mathbb{N}$, $p+q=n$. Lifte Basiselement von $P/\mathfrak{m}P$ zu Elementen $\{e_1, \ldots, e_p\}$ bzw. $\{e'_1, \ldots, e'_q\}$. Dann ist $\{e_1, \ldots, e_p, e'_1, \ldots, e'_q\}$ eine Basis von $P \oplus Q$ und somit P frei mit Basis $\{e_1, \ldots, e_p\}$. Das Liften zu einer Basis ist möglich, da die e_i bzw. e_j eine lineare Abbildung $R^p \oplus R^q \to P \oplus Q \cong R^n$ bestimmen, die durch eine Matrix $(r_{ij}) \in M_n(R)$ mit $(\overline{r_{ij}}) \in M_n(F)^\times$ beschrieben wird. Dann gilt aber schon $(r_{ij}) \in M_n(R)^\times$ (der Morphismus $\mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_n(R/I)$ ist surjektiv für ein Radikalideal I, insbesondere also für $\mathfrak{m}$). $\square$

Bemerkung. Die Aussage gilt auch ohne die Bedingung der endlichen Erzeugtheit (Kaplansky).

Corollar 1.4. *Ist $P \in \mathbf{P}(R)$, so gilt für Primideale $\mathfrak{p} \subset R$, dass $P_\mathfrak{p} \cong (R_\mathfrak{p})^n$ für ein $n \geq 0$ und es existiert ein $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ mit $P[\frac{1}{s}] \cong R\big([\frac{1}{s}]\big)^n$ (Lokalisierung außerhalb von s ist frei).*

Beweis. Zunächst ist $P_\mathfrak{p} \in \mathbf{P}(R_\mathfrak{p})$ (Lokalisieren vertauscht mit direkten Summen). Nach Lemma 1.3 ist $P_\mathfrak{p}$ frei. Wegen $P_\mathfrak{p} = \big\{\frac{p}{s} \,\big|\, p \in P, s \in R \setminus \mathfrak{p}\big\}$ finden wir einen R-Modulhomorphismus $f\colon R^n \to P$ mit $f_\mathfrak{p}$ ein Iso. Wegen $\mathrm{coker}(f)$ endlich erzeugt und $\mathrm{coker}(f)_\mathfrak{p} = 0$, wird $\mathrm{coker}(f)$ durch ein Element $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ annuliert. Für dieses s ist dann $f[\frac{1}{s}]\colon \big(R[\frac{1}{s}]\big)^n \to P[\frac{1}{s}]$ surjektiv. Wegen $P[\frac{1}{s}]$ projektiv, ist $\big(R[\frac{1}{s}]\big)^n$ isomorph zu $P[\frac{1}{s}] \oplus M$ für einen endlich erzeugten $R[\frac{1}{s}]$-Modul M mit $M_\mathfrak{p} = 0$. Wie oben wird dann M durch ein Element $t \in R \setminus \mathfrak{p}$ annuliert und wir erhalten

$$f\big[\frac{1}{st}\big]\colon \Big(R\big[\frac{1}{st}\big]\Big)^n \xrightarrow{\cong} P\big[\frac{1}{st}\big]\,. \qquad \square$$

Bemerkung. Insbesondere ist $P_\mathfrak{q} \cong (R_\mathfrak{q})^n$ für $s \notin \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$.

2 Der Rang eines Moduls

Motivation. Wir möchten uns auf die projektiven endlich erzeugten $P \in \mathbf{P}(R)$ beschränken, die konstanten Rang kleiner gleich der (Krull-)Dimension des Ringes R haben.

Definition (Rang)**.** Sei R ein kommutativer Ring. Der *Rang* eines endlich erzeugten R-Moduls M *an einem Primideal* $\mathfrak{p} \subset R$ ist definiert als

$$\mathrm{rang}_\mathfrak{p}(M) = \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}\big(M \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})\big)\,.$$

Hierbei ist $\kappa(\mathfrak{p}) = R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.

Bemerkung. (i) (Interpration durch Anzahl der Erzeuger) Wegen

$$M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p} \cong \kappa(\mathfrak{p})^{\mathrm{rang}_\mathfrak{p}(M)}$$

ist $\mathrm{rang}_\mathfrak{p}(M)$ die mininmale Anzahl der Erzeuger von $M_\mathfrak{p}$ (Nakayama Lemma).

(ii) Ist $P \in \mathbf{P}(R)$ endlich erzeugt und projektiv, so ist

$$\mathrm{rang}(P)\colon \mathrm{Spec}(R) \to \mathbb{N} \qquad \mathfrak{p} \mapsto \mathrm{rang}_\mathfrak{p}(P)$$

eine stetige (!) Funktion in den diskreten topologischen Raum $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (die $D_f = \big\{\mathfrak{p} \,\big|\, f \notin \mathfrak{p}\big\}$ sind Basis der Topologie von offenen Mengen von $\mathrm{Spec}(R)$ für $f \in R$).

(iii) Ist M nicht projektiv, so muss $\operatorname{rang}(M)$ keine stetige Funktion auf $\operatorname{Spec}(R)$ beschreiben (wähle $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). Ebenso muss $\operatorname{rang}(M)$ nicht stetig sein für einen unendlich erzeugten projektiven Modul (Kaplansky, siehe [Weibel, The K-Theory Book, Example I.2.15]).

Definition. Wir sagen, dass P *konstanten Rang* n hat, falls $n = \operatorname{rang}_{\mathfrak{p}}(P)$ unabhängig von $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ ist.

Beispiel. Ist der topologische Raum $\operatorname{Spec}(A)$ zusammenhängend, so ist $\operatorname{rang}_{\bullet}(P)$ konstant. Ist z.B. R integer mit Quotientenkörper k, so hat $P \in \mathbf{P}(R)$ konstanten Rang $\operatorname{rang}(P) = \dim_k(P \otimes_R F)$.

Hat andererseits ein projektiver Modul P konstanten Rang, so ist er endlich erzeugt (siehe [Weibel, The K-Theory Book, Exercise I.2.14].

Lemma 2.1. *Ist R ein kommutativer Ring und $f\colon \operatorname{Spec}(R) \to \mathbb{Z}$ eine stetige Funktion, so können wir*

$$\operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Spec}(R_1) \coprod \cdots \coprod \operatorname{Spec}(R_c)$$

zerlegen mit $f\big|_{\operatorname{Spec}(R_i)}$ konstant.

Beweis. Wegen $\operatorname{Spec}(R)$ quasi-kompakt nimmt f nur endlich viele Werte $n_1, \ldots, n_c \in \mathbb{Z}$ an. Da $\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie versehen ist, ist $V_i := f^{-1}(n_i)$ offen *und* abgeschlossen in $\operatorname{Spec}(R)$. Ohne Einschränkung sei R reduziert, d.h. der Ring R habe keine nilpotenten Elemente; es ist $\operatorname{Spec}(R) \cong \operatorname{Spec}(R/\operatorname{nil}(R))$. Sei nun I_i das V_i-definierende Ideal, also $I_i \overset{!}{=} \sqrt{I_i} = \cap\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in V_i\}$. Dann ist

- $I_i + \cdots + I_c = R$
- $I_i \cap I_j = 0$ für $i \neq j$, denn

$$I_i \cap I_j = \bigcap\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in V_i \cap V_j\} = \bigcap\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in f^{-1}(n_i) \cap f^{-1}(n_j)\} = 0$$

Mit dem chinesischen Restsatz folgt dann $R \cong \prod R_i$. □

Corollar 2.2. *Für viele Anwendungen können wir daher annehmen, dass $P \in \mathbf{P}(R)$ konstanten Rang besitzt.*

Beweis. Wir haben R-Modulisomorphismus $P \cong P_1 \times \cdots \times P_c$ für $P_i = P \otimes_R R_i$ von konstantem Rang und eine Zerlegung $R \cong R_1 \times \cdots \times R_c$ wie oben. □

Definition (stabil isomorph)**.** Zwei R-Moduln M, M' heißen *stabil isomorph*, falls $M \oplus R^m \cong M' \oplus R^m$ für ein $m \geq 0$.

Theorem 2.3 (Bass-Serre Cancellation Theorem)**.** *Sei R ein kommutativer noetherscher Ring mit $\dim_{\mathrm{Krull}}(R) = d$. Sei P ein projektiver R-Modul von konstantem Rang $n > d$.*

(i) $P \cong P_0 \oplus R^{n-d}$ für einen projektiven R-Modul P_0 von konstantem Rang d.
(ii) Ist P stabil isomorph zu P', so gilt bereits $P \cong P'$.
(iii) Ist $P \oplus M$ stabil isomorph zu M', so gilt bereits $P \oplus M \cong M'$

3 Lokal freie Moduln

Definition (lokal freier R-Modul)**.** Sei R kommutativ. Ein R-Modul M heißt *lokal frei*, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ ein $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ so existiert, dass $M[\frac{1}{s}]$ ein freier Modul ist.

Bemerkung. Nach Corollar 1.4 sind endlich erzeugte projektive R-Moduln lokal frei.

Proposition 3.1. *Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(i) *$M \in \mathbf{P}(R)$, d.h. M ist endlich erzeugt und projektiv.*

(ii) *M ist ein lokal freier R-Modul von endlichem Rang, d.h. $\operatorname{rang}_{\mathfrak{p}}(M) < \infty$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.*

(iii) *M ist ein endlich präsentierter R-Modul und für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R ist $M_{\mathfrak{p}}$ ein freier $R_{\mathfrak{p}}$-Modul.*

Beweisidee. Für Details siehe [Weibel, The K-Theory Book, 2.4].

(i)⇒(ii) Wiederum Corollar 1.4.

(ii)⇒(iii) treuflacher Abstieg

(iii)⇒(i) Haben eine Darstellung $R^m \to R^n \to M \xrightarrow{\epsilon} 0$ und $\epsilon^*\colon \operatorname{Hom}_R(M, R^n) \to \operatorname{Hom}_R(M, M)$ ist surjektiv (Surjektivität ist eine lokale Eigenschaft), wähle dann Urbild von id_M. □

4 Verkleben über offene Überdeckungen

Sei R kommutativ und seien $s_1, \ldots, s_c \in R$ so, dass $s_1R + \ldots s_cR = R$. Dann ist

$$\operatorname{Spec}(R) \subset \coprod \operatorname{Spec}\big(R[\frac{1}{s_i}]\big)\,.$$

Haben wir nun $g_{ij} \in \mathrm{GL}_n\big(R[\frac{1}{s_is_j}]\big)$ mit $g_{ii} = 1$ und $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ in $\mathrm{GL}_n\big(R[\frac{1}{s_is_js_k}]\big)$, so ist

$$P = \Big\{(x_1, \ldots, x_c) \in \prod \big(R[\frac{1}{s_i}]\big)^n \,\Big|\, g_{ij}(x_j) = x_i \text{ in } R[\frac{1}{s_is_j}]^n \text{ für alle } i, j\Big\}$$

ein endlich erzeugter projektiver R-Modul (verwende Proposition 3.1; $P\big[\frac{1}{s_i}\big] \cong R\big[\frac{1}{s_i}\big]^n$).

5 Milnor Quadrate und Verkleben Teil 2

Sei $I \subset R$ ein Ideal und $f\colon R \to S$ ein Ringmorphismus. Dann ist

$$R = \big\{(\overline{r}, s) \in (R/I) \times S \,\big|\, \overline{f}(\overline{r}) \equiv s \bmod IS\big\}$$

und das pullback-Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & S \arrow[d] \\ R/I \arrow[r, "\overline{f}"] & S/I \end{tikzcd}$$

wird *Milnor-Quadrat* genannt (nach Milnor, Introduction to algebraic K-theory).

Beispiel. Sei R ein kommutativer Ring und S eine endliche Erweiterung von R mit $\operatorname{Quot}(R) = \operatorname{Quot}(S)$ (z.B. ist S der ganze Abschluss von R) und I das Führerideal dieser Erweiterung, also

$$I = \big\{x \in R \,\big|\, xS \subset R\big\} = \operatorname{Ann}_R(S/R)\,.$$

I ist das größte Ideal von S, das vollständig in R enthalten ist.

Konstruktion. Haben wir ein Milnor-Quadrat wie oben, so können wir einen R-Modul $M = (M_1, g, M_2)$ mit $M_1 \in (S\text{–Mod})$, $M_2 \in (R/I\text{–Mod})$ und einem S/I-Modulisomorphismus

$$g\colon M_2 \otimes_{R/I} S/I \cong M_1/IM_1$$

wie folgt konstruieren: Wir setzen

$$M = \ker\bigl(M_1 \times M_2 \to M_1/IM_1\bigr) \qquad (m_1, m_2) = \overline{m_1} - g\bigl(\overline{f}(m_2)\bigr)$$

und nennen M den *durch Verkleben von M_1 und M_2 entlang g erhaltenen R-Modul.*

Beispiel. Verkleben von $S^n \in (S\text{−Mod})$ und $(R/I)^n \in (R/I\text{−Mod})$ entlang einer Matrix $g \in \mathrm{GL}_n(S/IS)$. So erhalten wir R zurück, indem wir S und R/I entlang $g = 1$ verkleben.

Theorem 5.1 (Milnorscher Verklebungssatz)**.** *(i) Erhalten wir P durch Verkleben von $P_1 \in \mathbf{P}(S)$ und $P_2 \in \mathbf{P}(R/I)$, so ist $P \in \mathbf{P}(R)$.*
(ii) $P \otimes_R S \cong P_1$ und $P/IP \cong P_2$.
(iii) Wir erhalten jeden Modul $P \in \mathbf{P}(R)$ auf diese Art.

Beweis. (iii) Sei $M \in (R\text{−Mod})$. Definiere dem R-Modul $M' \in (R\text{−Mod})$ durch Verkleben von $M_1 = M \otimes_R S \in (S\text{−Mod})$ und $M_2 = M \otimes_R (R/I) = M/IM \in (R/I\text{−Mod})$ entlang des kanonischen Isomorphismuses

$$\underbrace{(M/IM)}_{=M_2} \otimes_{R/I} (S/I) \cong M \otimes_R (S/I) \cong \underbrace{(M \otimes_R S)/I(M \otimes_R S)}_{=M_1/IM_1}.$$

Tensorieren wir die kurze exakte Folge

$$0 \to R \to (R/I) \oplus S \to S/I \to 0$$

mit M, so erhalten wir die exakte Folge

$$\mathrm{Tor}_1^R(M, S/I) \to M \to \underbrace{(M \otimes_R R/I) \oplus (M \otimes_R S)}_{=M_2 \times M_1} \to \underbrace{M \otimes_R S/I}_{=M_1/IM_1} \to 0$$

und somit die exakte Folge

$$\mathrm{Tor}_1^R(M, S/I) \to M \to M' \to 0\,.$$

Also ist M' ein Quotient von M. Ist M jedoch projektiv, so verschwindet der Tor und wir erhalten $M \cong M'$.

(i),(ii) Folgen aus [Weibel, The K-Theory Book, Exercise I.2.8]. □

6 Der Eilenberg-Schwindel

Warum beschränken wir uns auf $\mathbf{P}(R)$, also *endlich erzeugte* projektive Moduln? Sei R^∞ ein unendlich erzeugter freier Modul und $P \oplus Q = R^n$, d.h. P projektiv. Dann ist

$$P \oplus R^\infty \cong P \oplus Q \oplus P \oplus Q \oplus P \oplus \ldots \cong R^\infty$$

Ebenso ist $R^\infty \cong R^\infty \oplus R^\infty$.

Bemerkung (Eigenschaften unendlich erzeugter projektiver Moduln)**.** (i) (Bass) Ist der Ring R noethersch, so ist jeder unendlich erzeugte projektive R-Modul P frei, *außer* es gibt ein Ideal I so, dass P/IP weniger Erzeuger als P besitzt.
(ii) (Kaplansky) Jeder unendlich erzeugte projektive Modul ist direkte Summe von äbzählbar erzeugten projektiven Moduln.
(iii) (Kaplansky) Es existieren unendliche erzeugte projektive Moduln P, deren Rang endlich ist, die Abbildung $\mathrm{rank}(P)\colon \mathrm{Spec}(R) \to \mathbb{N}$ jedoch nicht stetig ist.