Übungsblatt 11

Körper und Galoistheorie
WS 2009/2010

Aufgabe 1

Hat ein algebraisch abgeschlossener Körper unendlich viele Elemente? (Man beweise seine Behauptung!)

Aufgabe 2

Seien $K \subseteq F$ eine Körpererweiterung, $L, L' \in Cl(\mathcal{ZW})$ und $H, H' \in Cl(\mathcal{U})$ (vgl. Übungsblatt 10, Aufgabe 4.). Man zeige:

(1) Es gilt

$$\begin{aligned} Gal(F, L \cap L') &= \sup\{Gal(F, L), Gal(F, L')\}, \\ Gal(F, \sup\{L, L'\}) &= Gal(F, L) \cap Gal(F, L'). \end{aligned}$$

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} F^{H \cap H'} &= \sup\{F^H, F^{H'}\}, \\ F^{\sup\{H, H'\}} &= F^H \cap F^{H'}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Sei $K \subseteq L \subseteq L' \subseteq F$ ein algebraischer Körperturm, $H' \in Gal(F, K)$ eine Untergruppe, $L \in Cl(\mathcal{ZW})$ und $H \in Cl(\mathcal{U})$. Man zeige:

(1) Ist $L \subseteq L'$ eine endliche Körpererweiterung, so ist $L' \in Cl(\mathcal{ZW})$.

(2) Ist $H' \subseteq H$ eine Untergruppe mit $[H : H'] < \infty$, so ist $H' \in Cl(\mathcal{U})$.

Aufgabe 4

Sei F ein Körper und H eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(F)$. Man zeige:

(1) Es ist $F^H \subseteq F$ eine Galoiserweiterung.

(2) Ist $H \in Cl(\mathcal{U}(F, F^H))$, so gilt $H = Gal(F, F^H)$.