Übungsblatt 2

Körper und Galoistheorie
WS 2009/2010

Aufgabe 1

Man zeige, dass eine Menge G zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung $* : G \times G \to G$ genau dann eine Gruppe ist (im Sinn von Definition 1.1.), wenn es ein e aus G gibt, sodass

(2') für alle a aus G gilt $e * a = a$ und

(3') es für alle a aus G es ein $\bar{a}$ aus G gibt mit $\bar{a} * a = e$,

d.h. es ist zu zeigen, dass für die Definition einer Gruppe neben der Assoziativität die Existenz eines links-neutralen Elements und die Existenz von links-Inversen genügt. Man finde ein Beispiel einer Menge G mit einer assoziativen Verknüpfung mit links-neutralem Element und rechts-Inversem, die keine Gruppe ist.

Aufgabe 2

Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e, a und b Elemente aus G und n eine positive natürliche Zahl. Man zeige

(1) $a^n = e$ genau dann, wenn $\operatorname{ord}(a) | n$,

(2) $\operatorname{ord}(a) = \operatorname{ord}(a^{-1}) = \operatorname{ord}(b^{-1}ab)$,

(3) $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{ord}(ba)$ und

(4) $\operatorname{ord}(a^n) = \operatorname{ord}(a)/\operatorname{ggT}(n, \operatorname{ord}(a))$.

Aufgabe 3

Man zeige, dass es einen Monoid-Isomorphismus $\operatorname{End}(\mathbb{Z}, +) \cong (\mathbb{Z}, \cdot)$ gibt und einen Isomorphismus $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}, +) \cong (\{-1, 1\}, \cdot)$ von Gruppen.

Aufgabe 4

Seien N und H Gruppen und $\varphi : H \to \operatorname{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Betrachte die Menge $N \rtimes_\varphi H := N \times H$ zusammen mit der Verknüpfung

$$\begin{array}{rcl} * : (N \rtimes_\varphi H) \times (N \rtimes_\varphi H) & \to & N \rtimes_\varphi H \\ ((n,h),(n',h')) & \mapsto & (n\varphi(h)(n'), hh'). \end{array}$$

Man zeige, dass $N \rtimes_\varphi H$ eine Gruppe ist. Man bestimme eine Verknüpfungstafel der Gruppe $\mathbb{Z}_3 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$ wobei $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ durch $\varphi(a)(b) = (-1)^a b$ definiert sei. Ist diese Gruppe abelsch?