Übungsblatt 4

Körper und Galoistheorie
WS 2009/2010

Aufgabe 1

Seien p und q Primzahlen mit $p < q$ und G eine Gruppe. Man zeige, dass G abelsch ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $|G| = p^2q$ und $q \not\equiv 1 \mod p$ und $p^2 \not\equiv 1 \mod q$,

(2) $|G| = pq^2$ und $q^2 \not\equiv 1 \mod p$,

(3) $|G| = p^2q^2$ und $p^2 \not\equiv 1 \mod q$ und $q^2 \not\equiv 1 \mod p$.

Aufgabe 2

Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 3$. Man zeige, dass das Zentrum $Z(\Sigma_n)$ der Permutationsgruppe Σ_n nur aus dem neutralen Element besteht.

Aufgabe 3

Eine Folge von Gruppenhomomorphismen

$$\{e\} \to N \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H \to \{e\}$$

heiße eine *kurze exakte Folge*, falls a injektiv ist, $a(N) = \ker(b)$ gilt und b surjektiv ist. Eine kurze exakte Folge dieser Form *spalte*, falls es einen Gruppenhomomorphismus $s : H \to G$ gibt, sodass gilt $b \circ s = \mathrm{id}_H$. Seien G, N und H Gruppen. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Es gibt eine kurze exakte spaltende Folge

$$\{e\} \to N \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H \to \{e\}.$$

(2) Es gibt einen Normalteiler $\tilde{N}$ von G mit $\tilde{N} \cong N$ und eine Untergruppe $\tilde{H}$ von G mit $\tilde{H} \cong H$ und einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : \tilde{H} \to \mathrm{Aut}(\tilde{N})$ definiert durch $\varphi(h)(n) = hnh^{-1}$, sodass gilt $G \cong \tilde{N} \rtimes_\varphi \tilde{H}$.

(3) Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$, sodass gilt $G \cong N \rtimes_\varphi H$.

(4) Es gibt einen Normalteiler $\tilde{N}$ von G mit $\tilde{N} \cong N$ und eine Untergruppe H von G mit $\tilde{H} \cong H$, sodass gilt $\tilde{N} \cap \tilde{H} = \{e\}$ und $G = \tilde{N}\tilde{H} := \{nh \in G \mid n \in \tilde{N} \text{ und } h \in \tilde{H}\}$.

Aufgabe 4

Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler und H eine Untergruppe von G mit $G = NH$ und $N \cap H = \{e\}$. Man zeige mit der Hilfe von Aufgabe 3, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) H ist ein Normalteiler in G.

(2) Es gilt $G \cong N \rtimes_\varphi H$, wobei φ definiert ist durch $\varphi(h) = \mathrm{id}_N$.

(3) G ist isomorph zum Produkt $N \times H$.

Man hat also insbesondere mit Aufgabe 4 von Blatt 2 ein Beispiel einer Untergruppe, die kein Normalteiler ist, denn das Produkt zweier abelscher Gruppen ist abelsch.