Übungsblatt 5

Körper und Galoistheorie
WS 2009/2010

Aufgabe 1
Eine Untergruppe U von G heiße *endlich erzeugt*, wenn es eine natürliche Zahl n und Elemente $g_1, \dots, g_n$ aus G gibt mit $U = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ (vgl. Definition 1.8.).

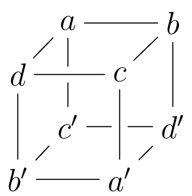
(1) Man zeige, dass Untergruppen zyklischer Gruppen zyklisch sind.

(2) Man betrachte $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als Gruppen bezüglich der Addition und zeige, dass jede endlich erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zyklisch ist.

Aufgabe 2 (Doppelte Punktzahl)
Die Teilmenge W des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ mit genau den Elementen

$$\begin{array}{llll} a = (-1,1,1), & b = (1,1,1), & c = (1,-1,1), & d = (-1,-1,1), \\ a' = (1,-1,-1), & b' = (-1,-1,-1), & c' = (-1,1,-1), & d' = (1,1,-1) \end{array}$$

beschreibt die Eckenmenge eines Würfels.



Die Gruppe
$$S(W) = \{\varphi \in GL(3,\mathbb{R}) \mid \varphi(W) = W\}$$
heißt die *Symmetriegruppe* von W und es gilt $\det(\varphi) \in \{-1,1\}$ für alle φ aus $S(W)$. Die Untergruppe

$$D(W) = \{\varphi \in GL(3,\mathbb{R}) \mid \varphi(W) = W \text{ und } \det(\varphi) = 1\}$$

von $S(W)$ heißt die *Drehgruppe* von W. Die Gruppen $S(W)$ und $D(W)$ operieren jeweils auf der Menge W mit $\varphi \cdot w = \varphi(w)$.

(1) Man bestimme $|D(W)|$. Kennen Sie die Gruppe $D(W)$?
(Hinweis: Man betrachte eine Ecke $x \in W$ und benutze die aus der Vorlesung bekannte Bahnformel $|D(W)| = |D(W)_x| \cdot |D(W) \cdot x|$.)

(2) Man finde zu jedem Primteiler p von $|D(W)|$ eine p-Sylowpruppe. Wie kann man diese geometrisch interpretieren?

(3) Es gibt eine kurze exakte Folge

$$\{e\} \to D(W) \xrightarrow{\subseteq} S(W) \xrightarrow{\det} \{-1,1\} \to \{e\}$$

von Gruppenhomomorphismen. Man zeige, dass diese Folge spaltet (vgl. Übungszettel 4.) und dass $S(W) = D(W) \times \mathbb{Z}_2$ gilt.

(4) Man zeige, dass die Gruppe $S(W)$ auflösbar ist.

Aufgabe 3

Sei G eine Gruppe, H eine abelsche Gruppe und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

(1) Man zeige, dass $[G, G]$ ein Normalteiler von G ist.

(2) Man zeige, dass $G/[G, G]$ eine abelsche Gruppe ist.

(3) Man zeige, dass gilt $[G, G] \subseteq \mathrm{Ker} f$.

(4) Sei $p : G \to G/[G, G]$ die Projektion. Man zeige, dass es genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{f} : G/[G, G] \to H$ gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & H \\ & G/[G,G] \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.