Übungsblatt 8

Körper und Galoistheorie
WS 2009/2010

Aufgabe 1
Sei $K \subseteq F$ eine Körpererweiterung. Man zeige:

(1) Es gibt eine endliche Menge $M \subseteq F$ von über K algebraischen Elementen mit $F = K(M)$ genau dann, wenn $[F : K] < \infty$.

(2) Ist $K \subseteq F$ eine endliche Körpererweiterung, so ist diese algebraisch.

Aufgabe 2
Seien K, F und L Körper mit $K \subseteq L \subseteq F$. Man zeige:

(1) Es ist $K \subseteq F$ eine algebraische Körpererweiterung genau dann, wenn $K \subseteq L$ und $L \subseteq F$ algebraische Körpererweiterungen sind.

(2) Ist $K \subseteq F$ eine algebraische Körpererweiterung und R ein Ring mit $K \subseteq R \subseteq F$, so ist R ein Körper.

Aufgabe 3
Sei K ein Körper, n eine positive natürliche Zahl, A eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen aus K und

$$\begin{aligned} E_A : K[X] &\to M(n \times n, K) \\ f &\mapsto f(A) \end{aligned}$$

der zugehörige Einsetzhomomorphismus. Das *Minimalpolynom* von A ist das eindeutige normierte Polynom m_A aus $K[X]$ mit $\mathrm{Kern}(E_A) = (m_A)$. Sei nun $K \subseteq F$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in F$ algebraisch über K. Für ein Element x des Körpers $K[\alpha]$ betrachte man die lineare Abbildung „Multiplikation mit x"

$$\begin{aligned} \mu_x : K[\alpha] &\to K[\alpha] \\ a &\mapsto x \cdot a \end{aligned}$$

von K-Vektorräumen. Nach Satz 13.15. gibt es eine Basis $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$ von $K[\alpha]$. Sei A_x die Matrix von μ_x bezüglich dieser Basis. Man zeige:

(1) Es gibt einen injektiven Homomorphismus $\psi : K[\alpha] \to M(n \times n, K)$ von Ringen, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K[X] \arrow[rr, "E_{A_\alpha}"] \arrow[dr, "E_\alpha"'] & & M(n \times n, K) \\ & K[\alpha] \arrow[ur, hook, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert (d.h. insbesondere, kann jede algebraische Körpererweiterung als ein Unterring eines Matrizenrings aufgefasst werden).

(2) Das Minimalpolynom f_α von α über K ist gleich dem Minimalpolynom m_{A_α} der linearen Abbildung μ_α.

Aufgabe 4

Sei $K \subseteq F$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in F$ algebraisch über K. Für ein Element x aus $L = K[\alpha]$ heißt $N_{L/K}(x) = \det(A_x)$ die *Norm* von x (bezüglich L/K) und $Sp_{L/K}(x) = \mathrm{Spur}(A_x)$ die *Spur* von x (bezüglich L/K). Man zeige:

(1) Die Norm und die Spur sind Gruppenhomomorphismen

$$\begin{array}{rcl} N_{L/K} & : & (L^\times, \cdot) \to (K^\times, \cdot) \\ Sp_{L/K} & : & (L, +) \to (K, +). \end{array}$$

(2) Für $K = \mathbb{R}$ und $\alpha = i$ gilt mit $L = \mathbb{R}[i]$

$$\psi(L) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

sowie $N_{L/\mathbb{R}}(a + bi) = a^2 + b^2$ und $Sp_{L/\mathbb{R}}(a + bi) = 2a$.

(3) Das Minimalpolynom von $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$ über $K = \mathbb{Q}$ ist das Polynom $X^2 + X + 1$ und es gilt mit $L = \mathbb{Q}[e^{\frac{2\pi i}{3}}]$

$$\psi(L) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a - b \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{Q}) \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\},$$

sowie $N_{L/\mathbb{Q}}(a + be^{\frac{2\pi i}{3}}) = a^2 - ab + b^2$ und $Sp_{L/\mathbb{Q}}(a + be^{\frac{2\pi i}{3}}) = 2a - b$. Was hat das mit Beispiel 13.16. aus dem Skript zutun?